Численная реализация алгоритма решения уравнений пограничного слоя псевдопластической среды

В.Н. Самохин,
д.ф.-м.н., профессор, зав. кафедрой ВМ

В работе [1, гл. 8, п. 8.3] изучалась нестационарная система уравнений двумерного симметрического пограничного слоя псевдопластической среды.

Доказана однозначная разрешимость следующей начально-краевой задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=$$

$$=\nu\frac{\partial}{\partial y}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^{n-1}\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial U}{\partial t}+U\frac{\partial U}{\partial x},\quad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0, \tag{1}$$

$0<n<1$ в области $D=\{0<t<T,\ 0<x<X,\ 0<y<+\infty\}$ с граничными условиями

$$u(0,x,y)=u_0(x,y),\quad u(t,0,y)=0,\quad u(t,x,0)=0,\quad v(t,x,0)=v_0(t,x),$$

$$u(t,x,y)\to U(t,x) \text{ при } y\to+\infty. \tag{2}$$

Предполагаем, что

$$U(t,x)=xV(t,x),\quad V(t,x)>0,\quad v_0(t,x)=x^{\frac{n-1}{n+1}}v_1(t,x),$$

где V, v_1, V_x, V_t – ограниченные функции. Как доказано в [1, гл. 8, п. 8.3] задача (1), (2) имеет решение при некотором X и $t\ge 0$ такое, что $u_y(t,x,y)>0$. Решение задачи единственно.

Следуя [1], перейдем в (1), (2) к переменным Крокко. Введем новые независимые переменные

$$\tau = t, \;\; \xi = x, \;\; \eta = \frac{u}{U} \tag{3}$$

и новую неизвестную функцию

$$w(\tau,\xi,\eta) = \frac{u_y{}^n}{x^{\frac{n-1}{n+1}} U(t,y)}. \tag{4}$$

В результате получим уравнение вида

$$\nu n V^{\frac{1-n}{n}} w^{\frac{n+1}{n}} w_{\eta\eta} - w_\tau \eta \xi V w_\xi + A w_\eta + B w = 0 \tag{5}$$

в области $\Omega = \{0<\tau<\infty,\ 0<\xi<X,\ 0<\eta<1\}$ с условиями

$$w(0,\xi,\eta) = w_0(\xi,\eta) = \frac{u_{0y}{}^n}{x^{\frac{n-1}{n+1}} U}, \;\; w(\tau,\xi,1) = 0,$$

$$\left.\left(\nu w^{\frac{1}{n}} w_\eta - v_1 w^{\frac{1}{n}} + C\right)\right|_{\eta=0} = 0, \tag{6}$$

где

$$A = (\eta^2 - 1)(V + \xi V_x) + (\eta - 1)\frac{V_t}{V}, \;\; B = -\eta\left(\frac{2n}{n+1} V + \xi V_x\right) - \frac{V_t}{V},$$

$$C = V^{\frac{n-1}{n}} \left(V + \xi V_x + \frac{V_t}{V}\right).$$

Решение задачи (1), (2) получается с помощью $w(\tau,\xi,\eta)$ и равенства

$$x^{\frac{1-n}{1+n}} y = \int_0^{u/(xV)} \frac{ds}{V^{\frac{1-n}{n}} w^{\frac{1}{n}}(t,x,s)}. \tag{7}$$

Если перейти к дискретному варианту уравнения (5), то на основе численного решения задачи (5), (6) можно получить с помощью равенства (7) численное решение задачи (1), (2).

Пусть $f^{m,l,k} = f(mh, ld, k\delta)$ для любой функции $f(\tau,\xi,\eta)$, где h, d, δ — положительные постоянные и $\delta^{-1} = J$ — целое число. Уравнение (5) с условиями (6) заменим системой линейных алгебраических уравнений относительно $w^{m+1,l,k}$

$$\nu n\left(V^{m,l}\right)^{\frac{1-n}{n}}\left(w^{m,l,k}\right)^{\frac{n+1}{n}}\frac{w^{m,l,k+1}-2w^{m,l,k}+w^{m,l,k-1}}{\delta^2}-$$

$$-\frac{w^{m+1,l,k}-w^{m,l,k}}{h}-k\delta md V^{m,l}\frac{w^{m,l,k}-w^{m,l-1,k}}{d}+$$

$$+A^{m,l,k}\frac{w^{m,l,k}-w^{m,l,k-1}}{\delta}+B^{m,l,k}w^{m,l,k}=0, \qquad (8)$$

$m=0,1,\ ...,\ l=0,1,\ ...,\ [X/d],\ k=1,\ 2,\ ...,\ J-1$

с условиями

$$w^{m+1,l,0}=\left(\frac{1}{2}\left(\left(w^{m+1,l,1}\right)^{\frac{n+1}{2n}}-\frac{\delta}{\nu}v_1^{m+1,l}\left(w^{m+1,l,1}\right)^{\frac{1-n}{2n}}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\sqrt{\left(\left(w^{m+1,l,1}\right)^{\frac{n+1}{2n}}-\frac{\delta}{\nu}v_1^{m+1,l}\left(w^{m+1,l,1}\right)^{\frac{1-n}{2n}}\right)^2+\frac{4\delta}{\nu}C^{m+1,l,0}}\right)^{\frac{2n}{1+n}}, \qquad (9)$$

$w_{0,1k}=w_0(ld,\ k\mathrm{d}),\quad l=0,1,\ ...,\ [X/d],\quad k=0,\ ...,\ J,$

$w^{m+1,l,J}=0,\quad l=0,1,\ ...,\ [X/d],\quad m=0,1,\ ...\ .$

Уравнения (8), (9) представляют собой явную конечно-разностную схему для задачи (5), (6). Исследование устойчивости и сходимости этой схемы можно провести методами, ранее изложенными в [1, гл. 6], [1, гл. 8, п. 8.3]. В частности, если обозначим через $W(\tau,\xi,\eta)$ решение задачи (5), (6), то имеет место неравенство

$$\left|W^{m+1,l,k}-w^{m+1,l,k}\right|\le M_1\left(h+d+\delta(1-(J-1)\delta)^{\frac{1-n}{1+n}}\right), \qquad (10)$$

где M_1 – постоянная, не зависящая от h, d, δ, но, возможно, зависящая от T.

Неравенство (10) оценивает скорость сходимости построенной разностной схемы.

Численное решение задачи (1), (2) можно получить, исходя из $w^{m+1,l,k}$ с помощью равенства (7). Предположим, что $0\le y\le y_0<\infty$, а k – любое натуральное число такое, что $y_\kappa\le y_0$. Тогда

$$y_\kappa=\sum_{k=0}^{\kappa}\frac{\delta}{(ld)^{\frac{1-n}{1+n}}\left(V^{m,l}\right)^{\frac{1-n}{n}}\left(w^{m,l,k}\right)^{\frac{1}{n}}}.$$

Таким образом в области D можно построить узлы сетки. Значение $u^{m,l,k}$ находится из равенства

$$y_\kappa = \frac{1}{(ld)^{\frac{1-n}{1+n}}} \int_0^{\frac{u(mh,ld,y_\kappa)}{ldV^{m,l}}} \frac{ds}{\left(V^{m,l}\right)^{\frac{1-n}{n}} w^{\frac{1}{n}}(mh,ld,s)}.$$

Здесь функция $w(mh, ld, s)$ получается из узловых значений $w^{m,l,k}$ линейным продолжением при $k\delta \le \eta < (k+1)\delta$. При этом справедлива следующая оценка скорости сходимости:

$$\left|u^{m+1,l}(y_\kappa) - u((m+1)h, ld, y_\kappa)\right| \le M_2\left(h + d + \delta(1-(J-1)\delta)^{\frac{1-n}{1+n}}\right),$$

$M_2 = \text{const}$ и не зависит от h и d.

Библиографический список

1. *Олейник О.А.* Математические методы в теории пограничного слоя / О.А. Олейник, В.Н. Самохин. – М. : Наука; Физматлит, 1997.